

MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS TRIFÁSICOS TRANSFORMADAS DE CLARKE E PARK APLICADAS AO CONTROLE DE INVERSORES

MATHEMATICAL MODELING OF THREE-PHASE CLARKE AND PARK TRANSFORM SYSTEMS APPLIED TO INVERTER CONTROL

 <https://doi.org/10.63330/aurumpub.052-003>

Andre de Souza Leone

Doutorado em Engenharia Elétrica
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5550-735X>

João Américo Vilela Junior

Doutorado em Engenharia Elétrica
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6991-5300>

RESUMO

Este capítulo aborda a modelagem matemática de sistemas elétricos trifásicos por meio da aplicação das Transformadas de Clarke e Park, ferramentas essenciais para a eletrônica de potência e para a análise integral de redes elétricas. O controle direto de tensão e corrente em coordenadas naturais abc apresenta elevada complexidade matemática devido ao acoplamento intrínseco das fases e ao comportamento variante no tempo das grandezas senoidais. Para superar essa limitação, a Transformada de Clarke é aplicada para projetar as três fases em um referencial estacionário ortogonal bidimensional ($\alpha\beta$), reduzindo a dimensionalidade do sistema e facilitando etapas de modulação e pré-filtragem. Sequencialmente, a Transformada de Park mapeia essas variáveis em um referencial síncrono girante (dq), acompanhando a frequência angular natural da rede elétrica e convertendo sinais alternados em valores numéricos contínuos. Essa transformação permite a separação elegante entre as partes real e imaginária do vetor resultante e viabiliza o uso de controladores lineares clássicos, como o Proporcional-Integral (PI), em malhas de controle de inversores e algoritmos de sincronismo (PLL). Conclui-se que os benefícios destas representações espaciais transcendem o projeto de conversores estáticos, consolidando-se como uma base analítica indispensável para estudos de estabilidade dinâmica, modelagem de faltas, proteção digital e monitoramento da qualidade de energia em sistemas de potência.

Palavras-chave: Sistemas Trifásicos; Transformada de Clarke; Transformada de Park; Inversores Estáticos; Controle Vetorial; Sistemas de Potência.

ABSTRACT

This chapter addresses the mathematical modeling of three-phase electrical systems through the application of the Clarke and Park Transforms, essential tools for power electronics and the integral analysis of electrical networks. The direct control of voltage and current in natural coordinates abc presents high mathematical complexity due to the intrinsic coupling of the phases and the time-varying behavior of sinusoidal quantities. To overcome this limitation, the Clarke Transform is applied to project the three phases into a two-dimensional orthogonal stationary reference frame ($\alpha\beta$), reducing the dimensionality of the system and facilitating modulation and pre-filtering steps. Sequentially, the Park Transform maps these variables into a rotating synchronous reference (dq), following the natural angular frequency of the electrical network and converting alternating signals into continuous numerical values. This transformation allows the elegant separation between the real and imaginary parts of the resulting vector and enables the use of classic linear controllers, such as Proportional-Integral (PI), in inverter control loops and synchronism algorithms (PLL). It is concluded that the benefits of these spatial representations transcend the design of static converters, consolidating themselves as an indispensable analytical basis for dynamic stability studies, fault modeling, digital protection and energy quality monitoring in power systems.

Keywords: Three-Phase Systems; Clarke Transformation; Park transform; Static Inverters; Vector Control; Power Systems.

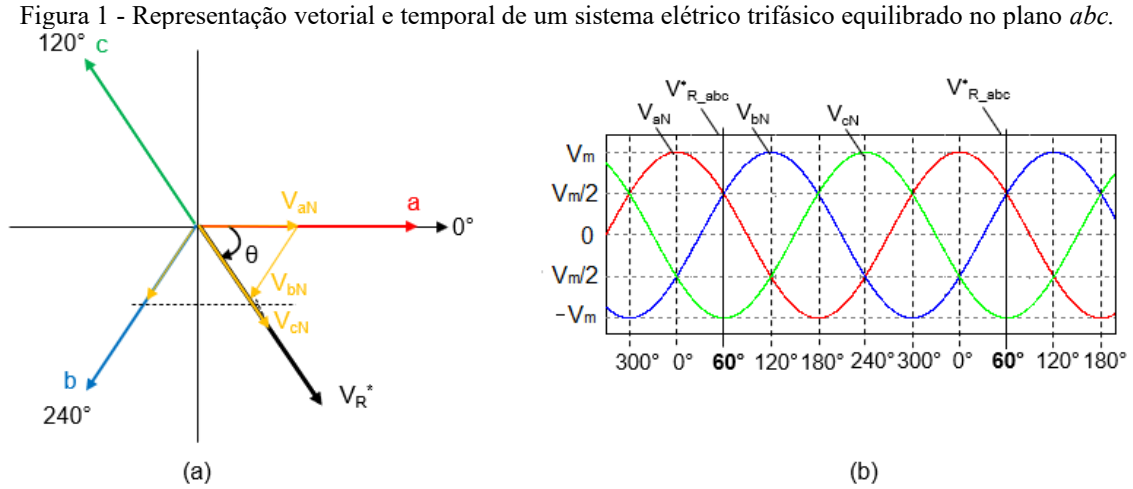
1 INTRODUÇÃO

O controle de conversores estáticos e a análise de sistemas elétricos trifásicos exigem o processamento de grandezas elétricas variantes no tempo, como tensões e correntes senoidais. Os sistemas trifásicos apresentam um acoplamento natural e intrínseco entre as suas fases. Devido a essa característica, a implementação de malhas de controle de corrente e tensão diretamente no referencial natural torna-se uma tarefa matematicamente complexa. Para contornar essa limitação e simplificar substancialmente tanto as estratégias de controle quanto a visualização analítica dos resultados, adotam-se representações matemáticas em planos referenciais simplificados.

As grandezas elétricas trifásicas podem ser inicialmente modeladas através de um plano vetorial com um referencial de coordenadas estacionárias abc , o qual gera um vetor espacial resultante que representa a dinâmica das três fases de forma unificada. A partir desse conceito fundamental, é possível transpor esse vetor para um referencial estacionário ortogonal de dois eixos ($\alpha\beta$) e, por fim, para um plano com dois eixos rotativos, denominado referencial síncrono dq . Embora a informação energética e elétrica contida em cada tipo de representação seja rigorosamente a mesma, a transição entre esses domínios facilita proposições cruciais para a estabilidade das malhas de controle de inversores.

2 REPRESENTAÇÃO NO REFERENCIAL ESTACIONÁRIO abc

A modelagem de um sistema de potência se inicia pela observação de suas grandezas no domínio natural do tempo. A Figura 1 apresenta um plano vetorial com um sistema de coordenadas abc e as respectivas tensões senoidais que representam cada fase do sistema trifásico no domínio temporal.



Neste espaço geométrico, o vetor espacial resultante é definido como V_R^* , sendo ele a soma vetorial direta das três fases que compõem o sistema. A posição instantânea deste vetor é definida pelo ângulo θ . No instante de tempo ilustrado na Figura 1, este ângulo possui um valor de 60° em relação ao eixo de referência (0°), o qual se encontra alinhado à fase a . A amplitude de pico das tensões de fase V_{aN} , V_{bN} e V_{cN} é denotada pela variável V_m .

Durante a operação em regime permanente, o vetor resultante V_R^* percorre todo o plano abc , deslocando-se continuamente com a velocidade angular da rede elétrica ω_n . No exemplo em questão, convencionou-se o deslocamento do vetor no sentido horário.

A Equação 1 descreve as tensões de fase V_{aN} , V_{bN} e V_{cN} . Observa-se a introdução de uma defasagem angular de -90° , uma premissa necessária para que o sistema adote como referência de sincronização o ponto de máximo (valor de pico) da tensão na fase a .

$$\begin{aligned} V_{aN} &= V_m \cdot \sin(\theta + 90^\circ) \\ V_{bN} &= V_m \cdot \sin(\theta + 90^\circ + 240^\circ) \\ V_{cN} &= V_m \cdot \sin(\theta + 90^\circ + 120^\circ) \end{aligned}$$

Conforme evidenciado na Figura 1(a), o eixo que estabelece a referência de 0° está perfeitamente em fase com o vetor a . Por conseguinte, para que o vetor espacial resultante se sincronize exatamente com

o pico da tensão da fase a , indicado pela marcação de 0° no eixo horizontal da Figura 1(b), é imperativo que sua trajetória se inicie defasada em -90° .

A representação matemática dessas tensões de fase na forma de coordenadas polares, considerando o cenário em que o vetor resultante V_R^* se encontra na posição $\theta = 60^\circ$, é expressa pela Equação 2:

$$\begin{aligned}\vec{V}_{aN} &= \frac{1}{2} V_m |_{\underline{\quad}}^{0^\circ} \\ \vec{V}_{bN} &= \frac{1}{2} V_m |_{\underline{\quad}}^{240^\circ} \\ \vec{V}_{cN} &= -1 V_m |_{\underline{\quad}}^{120^\circ}\end{aligned}$$

Por fim, a Equação 3 consolida o vetor espacial resultante na sua forma polar para o ângulo $\theta = 60^\circ$. Em um sistema elétrico perfeitamente equilibrado, a amplitude deste vetor resultante permanece rigorosamente constante ao longo do tempo, possuindo um módulo invariável igual a $3/2$ do valor de pico das tensões de fase (V_m).

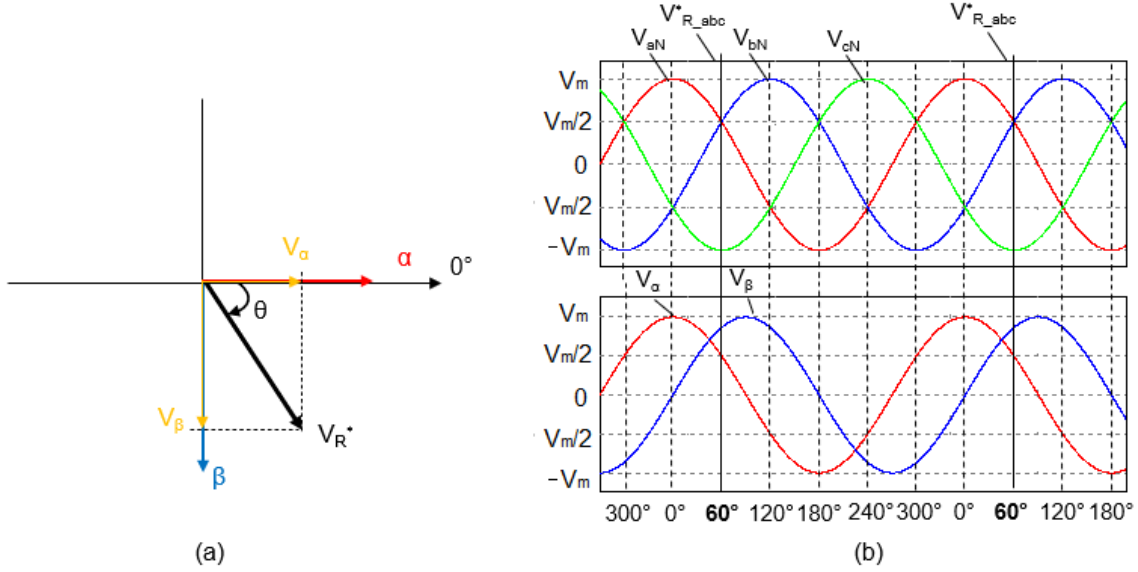
$$\vec{V}_R = \frac{3}{2} V_m |_{\underline{\quad}}^{60^\circ}$$

3 TRANSFORMADA DE CLARKE E O REFERENCIAL ESTACIONÁRIO AB

A representação no plano abc , embora seja a forma natural de visualizar as grandezas elétricas, apresenta redundâncias matemáticas em sistemas equilibrados, dado que a soma das três correntes ou tensões é nula. Para simplificar a análise geométrica e a estrutura de controle do inversor, é possível reduzir este sistema de três eixos para um sistema ortogonal de apenas duas coordenadas.

A Figura 2 ilustra o vetor espacial resultante V_R projetado num referencial estacionário bidimensional, denominado plano $\alpha\beta$. Neste referencial, o eixo α encontra-se perfeitamente alinhado com a fase a do sistema original V_{aN} , enquanto o eixo β é posicionado com uma defasagem ortogonal de 90° .

Figura 2 - Representação vetorial e temporal de um sistema trifásico no plano $\alpha\beta$.



A transição das coordenadas naturais (abc) para as coordenadas bifásicas ortogonais $\alpha\beta$ é realizada através de uma ferramenta matemática consolidada na literatura clássica: a Transformada de Clarke. Esta transformação permite determinar, de forma direta, as componentes do vetor resultante no novo plano geométrico.

A Equação 4 descreve a formulação matricial da Transformada de Clarke. O coeficiente $2/3$ incorporado à matriz atua como um fator de ganho fundamental. A sua função é garantir a invariância da amplitude, ou seja, assegurar que o módulo do vetor no plano $\alpha\beta$ se mantenha rigorosamente igual ao valor de pico das tensões de fase originais (V_m).

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{aN} \\ v_{bN} \\ v_{cN} \end{bmatrix}$$

Em cenários operacionais onde se faz necessário reverter o domínio das variáveis, retornando do plano $\alpha\beta$ para as grandezas de fase abc , um procedimento comum na fase de síntese da Modulação por Largura de Pulso (PWM) do inversor, recorre-se à Transformada Inversa de Clarke matematicamente descrita pela Equação 5.

$$\begin{bmatrix} v_{aN} \\ v_{bN} \\ v_{cN} \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix}$$

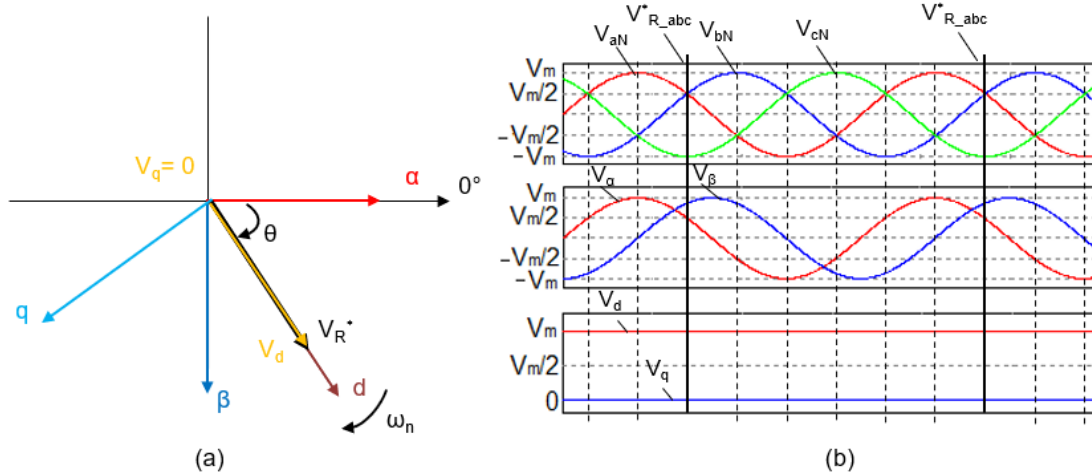
Do ponto de vista da aplicação em eletrônica de potência, o referencial estacionário $\alpha\beta$ é uma abordagem recorrente nas malhas de controlo de tensão e corrente de inversores trifásicos conectados a sistemas elétricos equilibrados. Na arquitetura específica de inversores de interligação à rede, os sinais neste referencial cumprem dois papéis vitais: geram os vetores fundamentais para as técnicas de modulação vetorial e atuam como sinais de entrada para a etapa de pré-filtragem dos algoritmos de sincronismo por malha de captura de fase (PLL - *Phase-Locked Loop*).

4 TRANSFORMADA DE PARK E O REFERENCIAL SÍNCRONO dq

Apesar da redução matemática proporcionada pelo plano estacionário $\alpha\beta$, as variáveis elétricas nesse domínio continuam apresentando um comportamento oscilatório (senoidal) no tempo. Para contornar os desafios de rastreamento de sinais variantes no tempo, o vetor espacial resultante pode ser projetado em um referencial síncrono dq.

A Figura 3 ilustra o vetor resultante V_R^* mapeado no plano dq. Diferente dos domínios anteriores, este plano e seus eixos coordenados (d e q) giram em sincronia com a frequência angular natural da rede elétrica (ω_n). Como consequência geométrica dessa rotação síncrona, os sinais senoidais alternados passam a ser observados e representados como valores numéricos contínuos (constantes).

Figura 3 - Representação vetorial e temporal de um sistema elétrico trifásico no plano síncrono dq.



A principal vantagem técnica da adoção do referencial síncrono dq reside na separação elegante entre a parte real (eixo direto, d) e a parte imaginária (eixo em quadratura, q) do vetor resultante. Essa desacoplagem é uma premissa que contribui fortemente para a estabilidade e o projeto das estratégias de controle do inversor de interligação à rede. No cenário ilustrado pela Figura 3, nota-se que o vetor resultante se encontra perfeitamente alinhado em fase com o eixo d. Nessas condições de alinhamento ideal, o vetor

passa a ser formado unicamente pela coordenada V_d , resultando em um valor nulo para a coordenada em quadratura ($V_q = 0$).

A transição das variáveis do referencial estacionário $\alpha\beta$ para o referencial síncrono dq é viabilizada matematicamente pela Transformada de Park, definida pela Equação 6. O ângulo de transformação (θ) corresponde ao deslocamento angular da rede elétrica, definido por $\theta = \omega_{nt}t$.

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix}$$

Da mesma forma que no plano $\alpha\beta$, a operação inversa é frequentemente exigida nas malhas de controle do inversor para retornar os sinais de comando ao domínio estacionário e viabilizar a modulação de pulso. Para obter novamente os valores de tensão ou corrente no plano $\alpha\beta$, utiliza-se a Transformada Inversa de Park, descrita pela Equação 7.

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix}$$

Na prática da eletrônica de potência, o referencial síncrono dq é amplamente adotado no desenvolvimento de algoritmos de Sincronismo por Malha de Captura de Fase (PLL). O fato de os sinais v_d e v_q se comportarem como grandezas de corrente contínua (CC) traz um benefício formidável: permite que controladores lineares clássicos do tipo Proporcional-Integral (PI) sejam empregados como compensadores diretos nas malhas de controle, garantindo erro nulo em regime permanente. Exemplos práticos do projeto desses compensadores operando no referencial dq são detalhados na literatura.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A representação de sistemas elétricos trifásicos por meio de transformações matemáticas constitui um pilar fundamental não apenas para a eletrônica de potência, mas para a análise integral das redes elétricas modernas. Conforme abordado neste capítulo, a transição do domínio natural das fases de coordenadas estacionárias abc para os referenciais estacionário de dois eixos ($\alpha\beta$) e síncrono girante (dq) simplifica significativamente a visualização e o tratamento de grandezas elétricas variantes no tempo.

A Transformada de Clarke atua na redução da complexidade dimensional do sistema ao projetar as três fases em um plano ortogonal, enquanto a Transformada de Park possibilita que grandezas senoidais alternadas sejam manipuladas analiticamente como valores contínuos. Essa transição geométrica, somada

à separação precisa entre a parte real e a imaginária do vetor resultante, forma a base matemática que viabiliza a implementação de estratégias de controle robustas e eficientes.

Embora essas transformadas sejam abordadas com grande ênfase sob a ótica do projeto de conversores estáticos, em que são essenciais para o sincronismo via algoritmos de PLL, controle do inversor de interligação e geração de vetores de modulação, os benefícios dessas representações transcendem largamente essa aplicação específica. No escopo mais amplo da engenharia de sistemas de potência, a modelagem nos domínios $\alpha\beta$ e dq fornece uma base analítica indispensável para diversas outras atividades críticas.

Entre essas atividades, destacam-se os estudos de estabilidade transitória e dinâmica de máquinas elétricas rotativas (motores e geradores), a modelagem avançada de faltas assíncronas e curtos-circuitos na rede, o desenvolvimento de algoritmos de alta velocidade para relés de proteção digital e o monitoramento rigoroso de indicadores de qualidade de energia. Dessa forma, o domínio dessas representações simplificadas consolida-se como uma competência técnica essencial para os engenheiros, garantindo a confiabilidade, a flexibilidade e a eficiência em toda a cadeia de geração, transmissão e distribuição de energia elétrica.

REFERÊNCIAS

CLARKE E., **Circuit analysis of A-C power systems: symmetrical and related components**, Vol 1. New York: John Wiley and Sons. 1943. Disponível em:
<https://archive.org/details/circuitanalysis0001clar/page/n5/mode/2up>.

PARK, R. H. **Two-reaction theory of synchronous machines generalized method of analysis-part I**. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. V.: 48, I: 3, 1929. Disponível em:
<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/5055275/>.

NICASTRI, A.; NAGLIERO, A. **Comparison and evaluation of the PLL techniques for the design of the grid-connected inverter systems**. IEEE International Symposium on Industrial Electronics, p. 3865–3870, 2010. ieeexplore.ieee.org. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/5637778/>.

CIOBOTARU, M.; TEODORESCU, R.; BLAABJERG, F. **A new single-phase PLL structure based on second order generalized integrator**. PESC Record - IEEE Annual Power Electronics Specialists Conference, 2006. ieeexplore.ieee.org. Disponível em:
<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/1711988/>.

HOLMES, D. G.; MCGRATH, B. P.; PARKER, S. G. **Current regulation strategies for vector-controlled induction motor drives**. IEEE Transactions on Industrial Electronics, v. 59, n. 10, p. 3680–3689, 2012. ieeexplore.ieee.org. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/5991955/>

VASQUEZ, J. C.; GUERRERO, J. M.; SAVAGHEBI, M.; **Modeling, analysis, and design of stationary-reference-frame droop-controlled parallel three-phase voltage source inverters**. IEEE

Transactions on Industrial Electronics. V: 60, I: 4, 2013. ieeexplore.ieee.org. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6184306/>