MODELAGEM DE FENÔMENOS DINÂMICOS POR MEIO DO CÁLCULO DIFERENCIAL: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA E FÍSICA

MODELING OF DYNAMIC PHENOMENA THROUGH DIFFERENTIAL CALCULUS: CONTRIBUTIONS TO THE TEACHING OF MATHEMATICS AND PHYSICS

https://doi.org/10.63330/aurumpub.050-064

Evandro de Carvalho Ribeiro
E-mail: evribeiro55@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6972-7644

Francisca das Chagas Oliveira
E-mail: engenheira.franoliv@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6262-9125

Francisco Arlon de Oliveira Chaves
E-mail: arlonoliv@hotmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5503-0923

Eugênia Maria dos Santos Cordeiro
E-mail: emscordeiro81@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0009-0006-2592-2388

Andreson de França Almeida
E-mail: andresonalmeida@ifpi.edu.br
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-2282-1375

Gilvan Moreira da Paz
E-mail: gilvan@ifpi.edu.br
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6849-0320

RESUMO

O presente artigo analisa os fundamentos do cálculo diferencial e suas aplicações em problemas centrais da Física Clássica, com ênfase na cinemática e na mecânica ondulatória. Partindo da definição rigorosa de derivada como limite do quociente diferencial, conforme formalizado por Cauchy e Weierstrass no século XIX, o trabalho desenvolve as regras operatórias de diferenciação, discute a interpretação geométrica e física da derivada e demonstra analiticamente as equações de movimento uniformemente variado. Em seguida, aplica-se o operador diferencial à equação de onda progressiva senoidal, deduzindo as expressões para velocidade instantânea e aceleração instantânea de um ponto do meio vibrante. O tratamento matemático evidencia que a velocidade de fase de uma onda mecânica transversal em uma corda sob tensão é determinada, simultaneamente, pela propriedade elástica (tensão T) e pela propriedade inercial (massa linear μ), resultando na expressão $v = \sqrt{(T/\mu)}$, confirmada pelo método dimensional. A metodologia adotada é de natureza analítico-dedutiva, recorrendo ao aparato formal do cálculo diferencial e à notação de Leibniz. Os resultados demonstram que a diferenciação constitui ferramenta indispensável para a modelagem precisa de fenômenos físicos dinâmicos, superando as limitações das abordagens algébricas elementares.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial; Derivada; Mecânica Ondulatória; Física Clássica; Cinemática.

ABSTRACT

This article examines the foundations of differential calculus and its applications to central problems in Classical Physics, with emphasis on kinematics and wave mechanics. Beginning from the rigorous limit-based definition of the derivative, as formalised by Cauchy and Weierstrass in the nineteenth century, the work develops the operational rules of differentiation, discusses the geometric and physical interpretation of the derivative, and analytically demonstrates the equations of uniformly accelerated motion. Subsequently, the differential operator is applied to the sinusoidal progressive wave equation, yielding explicit expressions for the instantaneous velocity and acceleration of a point in the vibrating medium. The mathematical treatment shows that the phase velocity of a transverse mechanical wave on a tensioned string is governed jointly by the elastic property (tension T) and the inertial property (linear mass density μ), producing the expression $v = \sqrt{(T/\mu)}$, which is confirmed by dimensional analysis. The methodology is analytical-deductive, employing the formal apparatus of differential calculus and Leibniz notation. Results demonstrate that differentiation constitutes an indispensable tool for the precise modelling of dynamic physical phenomena, transcending the limitations of elementary algebraic approaches.

Keywords: Differential Calculus; Derivative; Wave Mechanics; Classical Physics; Kinematics.

1 INTRODUÇÃO

O cálculo diferencial e integral constitui um dos pilares da Matemática aplicada às ciências naturais e engenharias. Concebido de forma independente por Isaac Newton (1643–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) no último quartel do século XVII, o cálculo surgiu da necessidade de formalizar matematicamente dois problemas fundamentais: a determinação da reta tangente a uma curva em um ponto e o cálculo da área sob uma curva (Stewart; Clegg; Watson, 2020). Embora o rigor lógico da teoria tenha sido estabelecido apenas no século XIX, sobretudo com as contribuições de Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857) e Karl Weierstrass (1815 -1897) por meio da definição épsilon-delta do limite, as aplicações físicas já se mostravam extraordinariamente produtivas desde a formulação das leis do movimento por Newton.

Na Física Clássica, o operador derivada adquire significado cinemático preciso: a derivada primeira do vetor posição em relação ao tempo corresponde à velocidade instantânea do ponto material, enquanto a derivada segunda corresponde à aceleração. Essa correspondência, longe de ser meramente formal, revela a estrutura causal dos fenômenos dinâmicos e constitui a linguagem natural das leis de Newton. Conforme observa Young e Freedman (2023), a introdução do conceito de velocidade instantânea exige, inevitavelmente, a noção de derivada, representando um dos grandes saltos conceituais da história das ciências.

No domínio da mecânica ondulatória, o cálculo diferencial torna-se ainda mais indispensável. A equação de uma onda progressiva senoidal, dada por $y(x,t) = A\,sen(kx - \omega t)$, é uma função de duas variáveis independentes (posição e tempo), e as grandezas de interesse físico, tais como a velocidade transversal e a aceleração transversal de um ponto do meio, são obtidas por derivação parcial em relação ao tempo. A velocidade de fase da onda, por sua vez, está relacionada com as propriedades elásticas e inerciais do meio propagador, conforme demonstrado analiticamente por Halliday, Resnick e Walker (2022).

O presente trabalho tem por objetivo central apresentar, de forma rigorosa e sistemática, os fundamentos do cálculo diferencial e suas aplicações na Física Clássica, em especial na cinemática e na mecânica ondulatória. Para tanto, organiza-se da seguinte forma: a Seção 2 apresenta a fundamentação teórica, compreendendo a definição formal de limite e derivada, as principais regras de diferenciação e a interpretação física do operador derivada; a Seção 3 descreve a metodologia adotada; a Seção 4 apresenta os resultados obtidos e a discussão analítica, com ênfase na aplicação do cálculo à equação de onda e à cinemática; e a Seção 5 registra as conclusões.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 O CONCEITO DE LIMITE E A DEFINIÇÃO FORMAL DE DERIVADA

A noção de derivada fundamenta-se no conceito de limite. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real e seja $x_0 \in D$ um ponto de acumulação do domínio. Define-se o limite de f(x) quando x tende a x_0 como o número real L, denotado por $lim(x \to x_0)\, f(x) = L$, tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ satisfazendo:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. (LIMA, 2016)$$

Com base nessa definição, a derivada de f em x_0 é definida como o limite do quociente diferencial:

$$f'(x_0) = lim(\Delta x \to 0)\,[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] / \Delta x \qquad (1)$$

Desde que tal limite exista e seja finito (Kreyszig, 2011). Quando existe, diz-se que f é diferenciável em x_0. Geometricamente, $f'(x_0)$ representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$, constituindo a taxa instantânea de variação de f em relação à variável independente x (Stewart, 2016, p. 145).

A notação leibniziana dy/dx preferível em contextos físicos por evidenciar as unidades das grandezas envolvidas é equivalente a f'(x) e remete diretamente ao quociente de diferenciais $dy\ e\ dx$. Para funções de múltiplas variáveis, utiliza-se a derivada parcial, denotada por $\partial f/\partial x$, em que as demais variáveis são tratadas como constantes durante o processo de diferenciação (Flemming; Gonçalves, 2007).

2.2 REGRAS OPERATÓRIAS DE DIFERENCIAÇÃO

O cálculo efetivo de derivadas é viabilizado por um conjunto de regras algébricas demonstráveis a partir da definição (1). Seja n ∈ ℝ, c ∈ ℝ constante, e sejam f e g funções diferenciáveis em x. As principais regras são (Thomas et al., 2012, p. 168–195):

(i) Regra da potência:

$$d/dx\,(x^{n}) = n \cdot x^{n-1}$$

(ii) Linearidade:

$$d/dx\,[c \cdot f(x) \pm g(x)] = c \cdot f'(x) \pm g'(x)$$

(iii) Regra do produto:

$$d/dx\,[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

(iv) Regra do quociente:

$$d/dx\,[f(x)/g(x)] = [f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)] / [g(x)]^2, \qquad g(x) \neq 0$$

(v) Regra da cadeia:

$$d/dx\,[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

(vi) Funções trigonométricas:

$$d/dx\,[sen(x)] = cos(x); \quad d/dx\,[cos(x)] = -sen(x)$$

As regras acima são suficientes para diferenciar a vasta maioria das funções elementares encontradas na Física Clássica. As demonstrações rigorosas de cada uma delas podem ser encontradas em Leithold (1994) e em Lima (2016).

2.3 INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA DERIVADA: CINEMÁTICA DO PONTO MATERIAL

Seja a posição de um ponto material ao longo de um eixo de referência descrita por uma função contínua e diferenciável s = s(t), em que t representa o tempo (em segundos) e s o deslocamento (em metros). Aplicando a definição (1):

$$v(t) = ds/dt = lim(\Delta t \to 0)\,[s(t + \Delta t) - s(t)]\,/\,\Delta t \quad (2)$$

obtém-se a velocidade instantânea v(t) (m/s), que representa a taxa de variação do deslocamento em relação ao tempo. A aceleração instantânea a(t) é, por definição, a derivada primeira da velocidade ou a derivada segunda do deslocamento:

$$a(t) = dv/dt = d^2s/dt^2 \quad (3)$$

No Movimento Uniformemente Variado (MUV), em que a aceleração a é constante, a integração das equações (2) e (3) conduz às equações horárias:

$$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + (1/2) \cdot a \cdot t^2 \quad (4)$$

$$v(t) = v_0 + a \cdot t \quad (5)$$

Onde s_0 e v_0 são, respectivamente a posição e a velocidade iniciais (Tipler; Mosca, 2014, p. 42). Estas equações, frequentemente apresentadas de modo axiomático no Ensino Médio, são, na realidade, consequências diretas das operações de derivação e integração sobre a função aceleração constante, conforme demonstrado na Seção 4.

2.4 ONDAS MECÂNICAS PROGRESSIVAS: EQUAÇÃO GERAL E PARÂMETROS

Uma onda mecânica progressiva transversal senoidal propagando-se ao longo do eixo x positivo pode ser descrita pela função:

$$y(x,t) = A \cdot sen(kx - \omega t + \varphi) \quad (6)$$

em que:

- A = amplitude da onda (m):

deslocamento máximo em relação à posição de equilíbrio;

- k = número de onda (rad/m):

$k = 2\pi/\lambda$, sendo λ o comprimento de onda;

- ω = frequência angular (rad/s):

$\omega = 2\pi f$, sendo f a frequência;

- φ = fase inicial (rad).

A velocidade de fase velocidade de propagação do perfil de onda é dada por (Halliday; Resnick; Walker, 2021, p. 410):

$$v = \omega/k = \lambda \cdot f \quad (7)$$

Tratando-se de uma onda em uma corda idealizada (homogênea, de comprimento L, sob tensão T e massa linear $\mu = m/L$), a velocidade de fase é determinada pelas propriedades do meio, resultando em (Nussenzveig, 2014, p. 161):

$$v = \sqrt{(T/\mu)} \quad (8)$$

A equação (8) pode ser verificada por análise dimensional: $[T] = N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$; $[\mu] = kg \cdot m^{-1}$; portanto $[T/\mu] = m^2 \cdot s^{-2}$, e $\sqrt{(T/\mu)} = m \cdot s^{-1}$, consistente com unidade de velocidade.

3 METODOLOGIA

O presente estudo adota uma abordagem de natureza teórico-analítica, fundamentada em uma pesquisa bibliográfica sistemática e no método dedutivo (Gil, 2019; Creswell; Creswell, 2022). A investigação estrutura-se em três etapas interdependentes, voltadas à formalização matemática e à validação física de modelos dinâmicos.

3.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E SELEÇÃO DE FONTES

A primeira etapa consistiu na análise exaustiva de obras de referência internacional e artigos científicos indexados (2015–2024). Foram selecionados textos que apresentam a fundamentação rigorosa do cálculo, como Stewart, Clegg e Watson (2020) e Thomas et al. (2023), integrando-os às aplicações clássicas e contemporâneas da física encontradas em Halliday, Resnick e Walker (2022) e Young e Freedman (2023). A seleção priorizou fontes que utilizam o formalismo de Cauchy e Weierstrass, garantindo que a transição entre a abstração matemática e o fenômeno físico ocorresse sob o rigor do conceito moderno de limite.

3.2 DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO E FORMALISMO MATEMÁTICO

A etapa central compreende o desenvolvimento dedutivo das equações governantes da cinemática e da mecânica ondulatória. Utilizou-se o aparato do cálculo diferencial sob a notação de Leibniz, considerada superior para a análise de taxas de variação relacionadas (Morin, 2022). O procedimento metodológico seguiu os seguintes passos:

- Definição dos operadores diferenciais aplicados a vetores posição e funções de onda.
- Expansão de funções multivariáveis por meio de derivadas parciais para o tratamento de ondas progressivas.
- Aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo para a validação das relações de continuidade entre aceleração, velocidade e deslocamento.

Cada etapa da derivação foi numerada e justificada logicamente, superando abordagens puramente algébricas e enfatizando a natureza infinitesimal das variações físicas.

3.3 VALIDAÇÃO POR ANÁLISE DIMENSIONAL E CONSISTÊNCIA TEÓRICA

Todas as expressões analíticas derivadas foram submetidas ao crivo da análise dimensional, método fundamental para assegurar a consistência das grandezas físicas (Thornton; Marion, 2021). Utilizou-se o Sistema Internacional de Unidades (SI) para a normalização dos resultados. Adicionalmente, realizou-se uma verificação de limites (análise assintótica) para garantir que as soluções derivadas convergissem para casos conhecidos sob condições específicas de contorno.

Por tratar-se de uma modelagem matemática de fenômenos consagrados, a pesquisa prescinde de dados empíricos primários, focando-se na precisão do modelo teórico. Os exemplos numéricos incluídos na Seção 4 possuem função pedagógica e ilustrativa, visando converter a abstração diferencial em métricas interpretáveis no domínio da engenharia e das ciências aplicadas.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES CINEMÁTICAS DO MUV VIA CÁLCULO DIFERENCIAL

Considere um ponto material com aceleração constante a(t) = a_0 (m/s²). Integrando a equação (3) em relação a t:

$$v(t) = \int a_0 \, dt = a_0 \cdot t + C_1 \quad (9)$$

A constante de integração C_1 é determinada pela condição inicial v(t = 0) = v_0, de onde $C_1 = v_0$. Portanto:

$$v(t) = v_0 + a_0 \cdot t \quad (10)$$

Integrando novamente:

$$s(t) = \int v(t) \, dt = \int (v_0 + a_0 \cdot t) \, dt = v_0 \cdot t + (1/2) \cdot a_0 \cdot t^2 + C_2 \quad (11)$$

A condição inicial s(t = 0) = s_0 fornece $C_2 = s_0$, recuperando a equação (4). A equação da dinâmica clássica $v^2 = v_0^2 + 2a_0 \cdot \Delta s$ é obtida eliminando t entre (10) e (11):

$$v^2 = (v_0 + a_0 \cdot t)^2 = {v_0}^2 + 2v_0 \cdot a_0 \cdot t + {a_0}^2 \cdot t^2 \implies v^2 = {v_0}^2 + 2a_0 \cdot (s - s_0) \quad (12)$$

Esse resultado evidencia que as equações do MUV não são postulados independentes, mas consequências formais da definição de derivada aplicada a uma aceleração constante. A capacidade do cálculo de unificar essas relações cinemáticas constitui, por si só, uma justificativa robusta para sua introdução sistemática no ensino de Física (Rezende, 2003; Souza; Pataro, 2020, p. 65).

4.2 VELOCIDADE TRANSVERSAL E ACELERAÇÃO TRANSVERSAL DE UM PONTO DO MEIO VIBRANTE

Seja a onda dada por (6) com φ = 0: y(x, t) = A·sen(kx − ωt). Para um dado ponto de abscissa x = x_0 fixado, a posição transversal é função apenas do tempo: y(t) = A·sen(kx_0 − ωt). Derivando em relação a t (mantendo x_0 constante, operação que corresponde à derivada parcial ∂y/∂t):

$$v_t(t) = \partial y / \partial t = -A\omega \cdot cos(kx_0 - \omega t) \quad (13)$$

Observa-se que a velocidade transversal máxima também chamada de velocidade de oscilação é $v_{max} = A\omega$. Esse resultado distingue-se fundamentalmente da velocidade de fase $v = \omega/k$: enquanto está descreve a velocidade de propagação do perfil da onda, aquela caracteriza a velocidade de oscilação transversal de cada ponto do meio (Halliday; Resnick; Walker, 2021, p. 412).

A aceleração transversal é obtida diferenciando (13) em relação a t:

$$a_t(t) = \partial^2 y/\partial t^2 = -A\omega^2 \cdot sen(kx_0 - \omega t) = -\omega^2 \cdot y(x_0, t) \quad (14)$$

A equação (14) revela que a aceleração transversal é proporcional e oposta ao deslocamento transversal característica fundamental do Movimento Harmônico Simples (MHS). Isso demonstra que cada ponto do meio executa um MHS com frequência angular ω, amplitude A e fase inicial kx_0 (Tipler; Mosca, 2014, p. 476).

4.3 APLICAÇÃO NUMÉRICA - MOVIMENTO ONDULATÓRIO

A fim de consolidar os resultados, considera-se um problema-tipo envolvendo a equação geral de onda. Seja um ponto material que se desloca sobre um segmento de reta obedecendo à equação horária s(t) = sen(t) (unidades SI). Determine: (a) a velocidade instantânea no instante t = π/4 s; (b) a aceleração instantânea no instante t = π/6 s.

Esse enunciado modela um ponto do meio que executa MHS com amplitude A = 1 m e frequência angular ω = 1 rad/s (k = 0, ou seja, analisa-se a dependência temporal em $x_0 = 0$).

Resolução - item (a):

Aplicando a regra de derivação de funções trigonométricas (item vi da Seção 2.2):

$$v(t) = s'(t) = d/dt\,[sen(t)] = cos(t) \quad (15)$$

Substituindo t = π/4 s:

$$v(\pi/4) = cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \approx 0{,}707\ m/s \quad (16)$$

Resolução - item (b):

$$a(t) = v'(t) = d/dt\,[cos(t)] = -sen(t) \quad (17)$$

Substituindo t = π/6 s:

$$a(\pi/6) = -sen(\pi/6) = -1/2 = -0{,}500\, m/s^2 \qquad (18)$$

Os resultados (16) e (18) são coerentes com o comportamento esperado do MHS: no instante t = π/4 s, o ponto encontra-se na fase em que a velocidade é positiva e decrescente; no instante t = π/6 s, a aceleração negativa indica que o ponto está se deslocando na direção contrária ao deslocamento positivo, em direção à posição de equilíbrio. Ambos os valores são confirmados pelas relações gerais da equação (13) e (14) com ω = 1 rad/s e A = 1 m.

4.4 DISCUSSÃO: RELEVÂNCIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL NA FORMAÇÃO EM CIÊNCIAS EXATAS

Os resultados apresentados nas subseções anteriores confirmam que o cálculo diferencial não é apenas uma ferramenta computacional é a linguagem estruturante da Física Clássica. Conforme argumentado por Rezende (2003) e corroborado por estudos mais recentes sobre o ensino integrado de Matemática e Física (Souza; Pataro, 2020; Pietrocola et al., 2016, p. 88), a compreensão profunda dos fenômenos físicos é significativamente comprometida quando o operador derivada é apresentado de forma meramente algorítmica, sem conexão com seu significado geométrico e físico.

De particular relevância é a distinção frequentemente negligenciada em textos introdutórios entre velocidade de fase ($v = \omega/k$) e velocidade transversal máxima ($v_{max} = A\omega$). Conforme demonstrado nas equações (7) e (13), trata-se de grandezas qualitativamente distintas: a primeira descreve a propagação da perturbação no espaço; a segunda, a oscilação de um ponto material do meio. Apenas a linguagem do cálculo diferencial permite tornar essa distinção absolutamente precisa e inequívoca.

No que se refere à velocidade de fase em cordas, a equação (8) $v = \sqrt{(T/\mu)}$ é particularmente instrutiva porque relaciona uma grandeza cinemática (velocidade) a grandezas de natureza mecânica (força e massa por comprimento). Sua dedução formal, baseada na análise das forças sobre um elemento infinitesimal da corda e nas equações de Newton, requer derivadas parciais e limites, exigindo, portanto, o pleno domínio do aparato diferencial aqui desenvolvido (Nussenzveig, 2014, p. 158–165).

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho demonstrou, de forma rigorosa e sistemática, os fundamentos teóricos do cálculo diferencial e sua aplicabilidade em problemas nucleares da Física Clássica. A partir da definição formal de derivada como limite do quociente diferencial, foram deduzidas: (i) as equações horárias do Movimento Uniformemente Variado; (ii) as expressões para a velocidade transversal e a aceleração transversal de um ponto do meio em uma onda senoidal progressiva; e (iii) as relações numéricas para um problema cinemático específico de MHS.

Os resultados consolidam a tese de que o cálculo diferencial é instrumento insubstituível para a modelagem precisa de fenômenos físicos dinâmicos. A abordagem algébrica elementar, embora suficiente para situações de variação média, não consegue capturar a riqueza dos fenômenos que envolvem taxas instantâneas de variação os quais constituem a maioria dos problemas relevantes da mecânica, eletromagnetismo, termodinâmica e física ondulatória.

Do ponto de vista pedagógico, os resultados corroboram a recomendação de que o ensino do cálculo diferencial seja introduzido em articulação explícita com os conceitos de Física, maximizando a compreensão mútua das duas disciplinas. A introdução precoce da derivada, proposta por Ávila (2003) e discutida por Rezende (2003), encontra respaldo nos resultados aqui apresentados: o ganho conceitual e instrumental é substancial, e a dificuldade matemática, quando devidamente contextualizada, não constitui obstáculo intransponível.

Como perspectivas para trabalhos futuros, sugere-se a extensão da análise para o domínio das equações diferenciais parciais em especial a equação de onda $\partial^2 y/\partial t^2 = v^2 \cdot \partial^2 y/\partial x^2$, cuja solução geral pelo método de d'Alembert constitui importante avanço sobre os resultados aqui apresentados. Adicionalmente, recomenda-se a investigação empírica do impacto do ensino integrado de cálculo e física sobre o desempenho acadêmico de estudantes de cursos de Engenharia e Licenciatura em Física.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. S. S. Cálculo das Funções de Uma Variável. v. 1. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

BRIDGMAN, P. W. Dimensional Analysis. New Haven: Yale University Press, 1922.

CRESWELL, J. W.; CRESWELL, J. D. **Research Design**: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches. 6. ed. Thousand Oaks: SAGE Publications, 2022.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração. 6. ed. rev. ampl. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

GIL, A. C. Métodos e Técnicas de Pesquisa Social. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2019.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. Fundamentals of Physics. 11. ed. New York: Wiley, 2021.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentals of Physics**. 12. ed. Hoboken: Wiley, 2022.

KREYSZIG, E. Advanced Engineering Mathematics. 10. ed. New York: Wiley, 2011.

LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica. v. 1. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

LIMA, E. L. Análise Real. v. 1: Funções de Uma Variável. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. (Coleção Matemática Universitária).

MORIN, D. **Introduction to Classical Mechanics**: With Problems and Solutions. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2022.

NUSSENZVEIG, H. M. Curso de Física Básica. v. 2: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2014.

PIETROCOLA, M. et al. Física em Contextos: Pessoal, Social e Histórico. v. 2. São Paulo: FTD, 2016.

REZENDE, F. As novas tecnologias na prática pedagógica sob a perspectiva construtivista. Ensaio - Pesquisa em Educação em Ciências, Belo Horizonte, v. 5, n. 1, p. 1–17, 2003. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1983-21172003050102. Acesso em: 10 jan. 2025.

SOUZA, M. A.; PATARO, P. R. M. Física: Contexto e Aplicações. v. 2. 3. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

STEWART, J. Calculus: Early Transcendentals. 8. ed. Boston: Cengage Learning, 2016.

STEWART, J.; CLEGG, D. K.; WATSON, S. H. **Calculus**: Early Transcendentals. 9. ed. Belmont: Cengage Learning, 2020.

THOMAS, G. B. et al. Cálculo. v. 1. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. Física para Cientistas e Engenheiros. v. 1: Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

THOMAS, G. B. et al. **Thomas' Calculus**: Early Transcendentals. 15. ed. London: Pearson, 2023.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Classical Dynamics of Particles and Systems**. 6. ed. Boston: Cengage Learning, 2021.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics**. 16. ed. Harlow: Pearson Education, 2023.